بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال هشتم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۸
شمارهٔ پیاپی: ۱۵

تصویر پشت جلد: روی جلد چاپ عکسی دستورالمنجمین، مؤسسهٔ پژوهشی میراث مکتوب، تهران، ۱۳۹۸.

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۲۰۰۰۰ تومان

مربع‌های وفقی در رساله‌ای از محمد کَشنوی، ریاضیدان آفریقایی[۱]

جان جی. واتکینز[۲]
ترجمهٔ صمد فرخ‌نهاد[۳]

نام کامل محمد بن محمد فولانی کَشنوی بیانگر تعلق قومی (فولانی، از قوم فولبه[۴]) و محل تولد او (کَشنَه) است.[۵] او اهل کاتسینا در شمال نیجریهٔ امروزی بود (در شکل با دایرهٔ توپر مشخص شده است). قوم فولانی عشایر گله‌دار و از زمرهٔ نخستین اقوام آفریقائی بودند که به اسلام رو آوردند. محمد کشنوی علاوه بر ریاضیات، به نجوم، احکام نجوم و عرفان نیز می‌پرداخت.

محمد کشنوی روی مربع‌های با مرتبهٔ فرد کار می کرد. مرتبهٔ یک مربع $n \times n$، همان n، یعنی تعداد ردیف‌ها یا ستون‌هایش است. اگر n معلوم و عددی فرد باشد، می‌توان عددی را که در مرکز مربع قرار می‌گیرد، و مجموع اعداد ردیف‌ها، ستون‌ها و قطرها را، که عدد ثابت وفقی (وفق مربع) نامیده می‌شود، با دستورهای نسبتاً ساده‌ای محاسبه کرد. محمد کشنوی با استفاده از این دستورها و با اتکا به نبوغش، روش‌هایی برای ساخت مربع‌های وفقی بامرتبهٔ فرد ابداع کرد. تکه‌ای از رسالهٔ او اخلاقیات حاکم بر کارش را نشان می‌دهد:

> تسلیم نشوید! تسلیم جهالت است. تسلیم مغایر قوانین این هنر (ریاضیات) است. کسانی که با هنر جنگ و کشتار آشنایند، نمی‌توانند از درد و رنج رهروان این علم شریف تصوری داشته باشند. مثل یک عاشق، بدون استقامت بی پایان نمی‌توان به وصال امید داشت.

---

۱. فصل چهارم کتاب *Across the Board*، از انتشارات دانشگاه پرینستون، ۲۰۰۴. ترجمهٔ حاضر از نسخهٔ هلندی آن است که در سال ۲۰۰۸ با نام "ریاضیات صفحهٔ شطرنج" منتشر شده است.

2. John J. Watkins
3. samad1331@kpnmail.nl
4. Fulbe

۵. در منابع نام او را به صورت محمد بن محمد فلانی کشنائی (کشناوی) نیز نوشته‌اند.

در بارۀ سال تولد محمد کشنوی اتفاق نظر وجود ندارد، اما می‌دانیم که او به یافتن راه جدیدی برای ساخت مربع‌های وفقی و تکمیل پنج ستون اسلام اهتمام می‌ورزید. نبوغ چندجانبۀ او به عنوان منجم، ریاضیدان، عارف و اختربین زندگی پرباری نصیبش کرد. او یکی از نخستین اعضای قوم فولانی بود، که به اسلام گروید. فولانی‌ها که عشایر چوپان و بازرگان بودند، در غرب آفریقا نفوذ سیاسی و اقتصادی داشتند. بسیار مستقل و رقابت‌جو هم بودند. آنها هم اسلام و هم خصلت رقابت‌جویشان را به کار گرفتند تا سرزمین‌های تازه‌ای در نیجریۀ امروزی به دست آورند.

محمد به دلیل اعتقادات مذهبی‌اش بخش بزرگی از زندگی خود را در خاورمیانه گذراند تا بتواند به عنوان یک مسلمان مؤمن وظایفش را به جا آورد. هم به دلیل گرویدنش به اسلام بود که این گفته به نام او ثبت شده است: "در خفا و تنهایی کار کنید. حروف در پناه خدایند. قدرت خدا در نام‌ها و در اسرار اوست و اگر شما به مخزن اسرار او گام بگذارید، به خلوت او راه یافته‌اید. پس نباید بی محابا اسرار او را بپراکنید." این گفتۀ محمد آشکارا نخستین ستون عملی اسلام را به تصویر می‌کشد[1]، که به موجب آن هر چه از جانب خدا به شما الهام شود، مادام که دیگری شایستۀ این الهام نباشد، بین خدا و شما باقی خواهد ماند. از این گفته می‌توان دریافت چرا محمد کشنوی مستقل کار می‌کرد و شاگردانش را هم به کار مستقل تشویق می‌کرد. محمد کشنوی پس از تکمیل پنجمین ستون عملی اسلام، که سفر حج است، به مصر رفت. در سال ۱۱۴۴ق، که هنوز در مصر اقامت داشت، رساله‌ای در بارۀ روش ساختن مربعات وفقی تا مرتبۀ ۱۱ به زبان عربی نوشت که محفوظ مانده و به دست ما رسیده است. نام این رساله بهجةالآفاق وایضاح اللبس والاغلاق في علم الحروف والاوفاق است (نسخۀ خطی شمارۀ ۶۵۴۹۶ مرکز مطالعات آسیایی و آفریقایی SOAS لندن). محمد کشنوی در سال ۱۱۵۴ق، پیش از بازگشت به کاتسینا، در قاهره درگذشت.

محمد کشنوی دست کم یک نسل پیش از آن که اویلر در سویس کار روی مسئلۀ "گشت کامل اسب روی صفحۀ شطرنج" را عرضه کند، در شهر کاتسینا زندگی می‌کرد. کاتسینا در آن زمان آبادترین شهر در بخش جنوبی راه بازرگانی مهمی بود که از صحرا تا شمال آفریقا کشیده شده بود.

کلاودیا زاسلافسکی[2] در کتاب ارزشمند خود در بارۀ ریاضیات در آفریقا، به نام آفریقا به حساب می‌آید، اعداد و الگوها در فرهنگ آفریقا (۱۹۹۹)، کار محمد کشنوی[3] روی مربع‌های وفقی را تشریح کرده است. پیش از آن که به روش محمد کشنوی برای ساخت مربع‌های وفقی بر پایۀ

۱. در متن "ستون اسلام" آمده است. منظور فروع دین، و نخستین آنها نماز است. مترجم

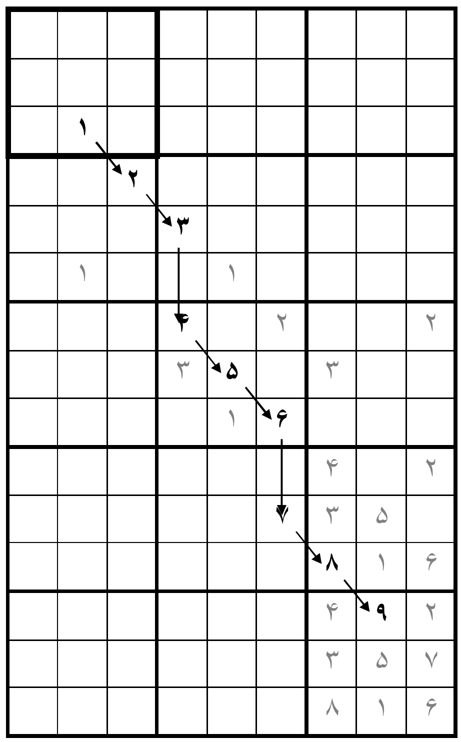
2. Claudia Zaslavsky

۳. در میراث علمی ۱۲، ص ۱۰۹، دربارۀ کشنوی و رساله‌اش اطلاعات مختصری هست (نسبت وی در آنجا فلانی آمده است).

حرکت اسب در شطرنج بپردازم، روش محمد کشنوی برای ساخت مربع وفقی ساده از مرتبهٔ فرد – یعنی مربع‌های ۳×۳، ۵×۵ و ۷×۷ را بیان می‌کنم.

مربع‌های وفقی مرتبهٔ فرد

روش محمد کشنوی برای ساختن مربع‌های وفقی با مرتبهٔ فرد بر پایهٔ شیوهٔ تازه‌ای بود. او فرض کرد که مربع در پایین و در سمت چپ خود (برای خواننده در سمت راست آن) تکرار می‌شود. در شکل زیر روش ساخت مربع وفقی ۳×۳ طبق روش محمد کشنوی دیده می‌شود:



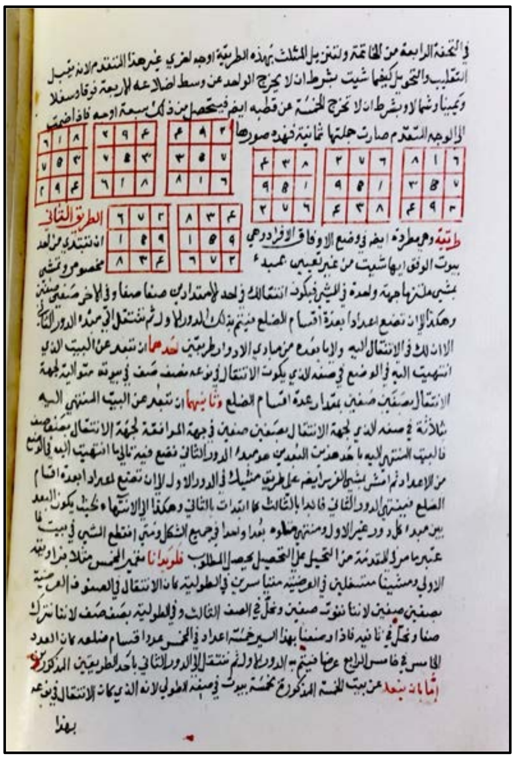
شکل ۱: ساخت مربع وفقی ۳×۳ به روش محمد کشنوی

کار را با عدد یک در زیر خانهٔ مرکزی شروع کنید. سپس به صورت قطری یک خانه بـه سـمت راست و پایین بروید. این خانهٔ ۲ است. به همین ترتیب ادامه دهید. در هر سومین حرکت، به جای آن که یک خانه به سمت راست و پایین بروید - زیرا در آنجا با یک خانهٔ پرشده مواجه مـی‌شـوید - عمودی دو خانه به پایین بروید. این کار را ادامه دهید تا مربع تکمیل شود (شکل ۱).

این ترتیب اعداد صحیح از ۱ تا ۹ در مربع ۳×۳، مربع وفقی نام دارد، زیرا مجموع اعـداد در هر ردیف و ستون و قطر اصلی برابر ۱۵ است. ۸ جمع متفاوت با مجموع یکسان! این مربع وفقـی

خاص بسیار مشهور و بسیار کهن است. افسانه‌ها می‌گویند که بیش از ۴ هزار سال پیش لاک‌پشتی از رود زرد واقع در چین بیرون خزید که این مربع بر پشتش حک شده بود. در زبان چینی به زرد «لو» می‌گویند. از این رو مربع وفقی ۳×۳ به مربع لوشو[1] نیز مشهور است.

مسئلهٔ ۱ - با استفاده از روش محمد کشنوی مربع وفقی ۵×۵ و ۷×۷ بسازید. مجموع اعداد هر ردیف، ستون و قطر اصلی در مربع ۵×۵ برابر۶۵ و در مربع ۷×۷ برابر ۱۷۵ است.



تصویر برگ ۲۱پ نسخهٔ شمارهٔ ۶۵۴۹۶ مرکز مطالعات آسیایی و آفریقاییSOAS که ۸ مربع وفقی حاصل از دوران و انعکاس مربع ۳×۳ لوشو را نشان می‌دهد.

درک این که چرا این روش جواب می‌دهد، چندان دشوار نیست: از آنجا که هر موقع به خانهٔ پرشده‌ای برسیم، عدد بعدی را در ستون دیگری، غیر از ستونی که خانهٔ پرشده در آن قرار دارد، می‌گذاریم، اعداد به تساوی در ستون‌ها توزیع می‌شوند. این نکته در مورد ردیف‌ها هم صادق است؛ البته نه به همان وضوح، زیرا در صورت برخورد با یک خانهٔ پرشده، دو خانه به پایین می‌رویم. قطرها هم درست از کار در می‌آیند، زیرا محمد کشنوی جای عدد ۱ را با دقت تمام چنان انتخاب کرده است که اولاً عدد میانی (۵ برای مربع ۳×۳، ۱۳ برای مربع ۵×۵، ۲۵ برای مربع ۷×۷، ...) درست در مرکز مربع قرار می‌گیرد و ثانیاً اعداد واقع بر قطرهای اصلی، هر اندازه که در یک جهت نسبت به عدد میانی افزایش می‌یابند، به همان اندازه در جهت دیگر کاهش می‌یابند. در اوایل قرن ۱۶ میلادی باشه[2] نیز همین روش را کشف کرد و روش کمابیش مشابهی توسط د لا لوبِر[3] از سیام (تایلند کنونی) به فرانسه برده شد.

1. Lo-Shu
2. Bachet
3. De la Loubere

ساخت مربع وفقی با استفاده از حرکت اسب[۱]

محمد کشنوی روش دیگری هم برای ساختن مربع‌های وفقی می‌شناخت: استفاده از حرکت اسب در شطرنج. اساس این روش همان است که در بالا توضیح دادیم، اما حرکت پایه‌ای در این روش نه یک حرکت قطری یک خانه‌ای، بلکه حرکت اسب است. ساختن مربع را از گوشهٔ سمت راست بالا، به عنوان خانهٔ ۱، شروع می‌کنیم و در یک جهت مطابق حرکت اسب به خانه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌رویم (باز هم فرض این است که مربع در پایین و این بار در سمت چپ خود تکرار شده است). در حرکت بعدی به خانهٔ ۱ می‌رسیم. در این جا محمد کشنوی اسب را دو خانه به سمت چپ حرکت می‌دهد. این خانهٔ ۶ است. از این خانه باز حرکت اسب را در همان جهت تکرار می‌کند تا به خانهٔ ۱۰ برسد. خانهٔ ۱۱ باز دوخانه در سمت چپ ۱۰ قرار می‌گیرد و ساخت مربع به همین ترتیب ادامه می‌یابد. یک مزیت این روش آن است که مجموع اعداد در تمام قطرها، و نه فقط در دو قطر اصلی آن، یکسان است.

مسئلهٔ ۲- محمد کشنوی گونهٔ دیگری از این روش را هم معرفی می‌کند، که در آن به جای دو خانه به چپ درصورت رسیدن به یک خانهٔ پر، باید سه خانه به بالا رفت. با استفاده از این روش یک مربع ۷×۷ بسازید. توجه کنید که مجموع اعداد هر ۱۴ قطر این مربع یکسان است.

در سال ۱۹۶۶ به همراه یکی از دانشجویانم، باری بالوف و بدون اطلاع از کار محمد کشنوی، روش مشابهی برای ساخت مربع‌های وفقی کشف کردیم. در روش ما نه فقط از حرکت اسب، بلکه از دورگشت اسب (طی تمام خانه‌ها و برگشت به خانهٔ شروع) استفاده می‌شد. تنها فرق آن با روش محمد کشنوی این بود که وقتی به یک خانهٔ پر می‌رسیدیم، به جای آن که در مسیری مستقیم به راست، چپ، بالا یا پایین برویم، برای رفتن به یک خانهٔ خالی از همان حرکت اسب استفاده می‌کردیم. یک مثال از روش ما برای ساخت مربع وفقی ۷×۷ در شکل زیر آمده است. برای مؤلف عربی‌نویس، طبیعی است که کارش را از خانهٔ بالا سمت راست شروع کند، چنانکه برای ما طبیعی بود از خانهٔ بالا سمت چپ شروع کنیم. توجه کنید که ما در حرکت بعدی از خانهٔ ۷، با یک خانهٔ پر (خانهٔ ۱) مواجه می‌شویم. از این رو در این خانه اسب ما حرکتی به بالا و سمت راست می‌کند (خانهٔ ۸). همچنین است در خانهٔ ۱۴ و چند خانهٔ دیگر.

۱. نیز بنگرید به میراث علمی، شمارهٔ ۴، ص ۴۴-۵۲ و شمارهٔ ۹، ص ۵۲-۷۲.

۱	۲۴	۴۷	۲۱	۳۷	۱۱	۳۴
۱۲	۳۵	۲	۲۵	۴۸	۱۵	۳۸
۱۶	۳۹	۱۳	۲۹	۳	۲۶	۴۹
۲۷	۴۳	۱۷	۴۰	۱۴	۳۰	۴
۳۱	۵	۲۸	۴۴	۱۸	۴۱	۸
۴۲	۹	۳۲	۶	۲۲	۴۵	۱۹
۴۶	۲۰	۳۶	۱۰	۳۳	۷	۲۳

شکل ۳: مربع وفقی ۷×۷ با حرکت دورگشت اسب

این روش را به تصادف پیدا کردیم و توانستیم ثابت کنیم که کلاً می‌تواند برای ساخت مربع‌های وفقی $n \times n$ به کار رود و اگر n به ۲، ۳ یا ۵ بخش پذیر نباشد، به نتیجه خواهد رسید. اگر n به ۲ و ۳ بخش پذیر نباشد اما به ۵ باشد، باز هم این روش جواب خواهد داد، اما مجموع اعداد قطرهای اصلی با هم برابر نیستند. یعنی در این حالت، نتیجهٔ کار یک مربع نیمه‌وفقی است. در بخش بعد به این نوع مربع پرداخته‌ام.

مسئلهٔ ۳- با استفاده از دورگشت اسب یک مربع ۱۳×۱۳ بسازید.

مربع‌های نیمه‌وفقی

ساخت مربع وفقی ۸×۸ به روش دورگشت اسب، مقصد نهایی کوشش‌هایی بوده که برای ساخت مربع‌های وفقی شده است. بسیاری کسان هم به آن خیلی نزدیک شده‌اند. در شکل زیر یک مربع ۸×۸ را می‌بینید که اویلر ساخته و بسیار به مربع وفقی نزدیک شده است؛ به این معنا که جمع اعداد تمام ردیف‌ها و ستون‌ها برابر ۲۶۰ است. اما این مربع به تمام معنا وفقی نیست، زیرا مجموع اعداد دو قطر اصلی آن با هم برابر نیستند. چنین مربع‌هایی را نیمه‌وفقی می‌نامند. در مربع زیر، علاوه بر آنچه ذکر شد، حرکت اسب تماماً بسته نیست، بلکه باز است (با حرکت اسب از خانهٔ ۶۴ به خانهٔ ۱ نمی‌توان رفت). این البته نقطهٔ ضعف بسیار کوچکی است و مربع اویلر از چندان نقاط قوتی برخوردار است که دو ضعف گفته شده را به‌راحتی جبران می‌کنند. مثلاً توجه کنید که هر یک از چهار ربع (۴ مربع ۴×۴) مربع اویلر خود یک مربع نیمه‌وفقی است و دیگر این که مجموع اعداد هر ربع ۲×۲ در هر یک از مربع‌های ۴×۴ برابر با ۱۳۰ است.

۱	۴۸	۳۱	۵۰	۳۳	۱۶	۶۳	۱۸
۳۰	۵۱	۴۶	۳	۶۲	۱۹	۱۴	۳۵
۴۷	۲	۴۹	۳۲	۱۵	۳۴	۱۷	۶۴
۵۲	۲۹	۴	۴۵	۲۰	۶۱	۳۶	۱۳
۵	۴۴	۲۵	۵۶	۹	۴۰	۲۱	۶۰
۲۸	۵۳	۸	۴۱	۲۴	۵۷	۱۲	۳۷
۴۳	۶	۵۵	۲۶	۳۹	۱۰	۵۹	۲۲
۵۴	۲۷	۴۲	۷	۵۸	۲۳	۳۸	۱۱

شکل ۴: مربع نیمه‌وفقی ۸×۸ اویلر با حرکت دورگشت اسب

در زیر دو جدول نیمه‌وفقی ۸×۸ دیده می‌شود که ینیش[1] و ونزلیدس[2] با حرکت دورگشت اسب ساخته‌اند. توجه کنید که حرکت اسب در هر دو مربع بر پایهٔ روشی است که پیش‌تر مطرح کردیم: این که در هر ربع ۴×۴ مربع ۸×۸ چهار چرخهٔ ۴حرکتی را بگنجانیم (برای روشنی، این چهار چرخه در ربع پایین سمت چپ دو مربع زیر، با سایه‌بندی‌های مختلف مشخص شده‌اند).

۵۰	۱۱	۲۴	۶۳	۱۴	۳۷	۲۶	۳۵
۲۳	۶۲	۵۱	۱۲	۲۵	۳۴	۱۵	۳۸
۱۰	۴۹	۶۴	۲۱	۴۰	۱۳	۳۶	۲۷
۶۱	۲۲	۹	۵۲	۳۳	۲۸	۳۹	۱۶
۴۸	۷	۶۰	۱	۲۰	۴۱	۵۴	۲۹
۵۹	۴	۴۵	۸	۵۳	۳۲	۱۷	۴۲
۶	۴۷	۲	۵۷	۴۴	۱۹	۳۰	۵۵
۳	۵۸	۵	۴۶	۳۱	۵۶	۴۳	۱۸

۴۶	۵۵	۴۴	۱۹	۵۸	۹	۲۲	۷
۴۳	۱۸	۴۷	۵۶	۲۱	۶	۵۹	۱۰
۵۴	۴۵	۲۰	۴۱	۱۲	۵۷	۸	۲۳
۱۷	۴۲	۵۳	۴۸	۵	۲۴	۱۱	۶۰
۵۲	۳	۳۲	۱۳	۴۰	۶۱	۳۴	۲۵
۳۱	۱۶	۴۹	۴	۳۳	۲۸	۳۷	۶۲
۲	۵۱	۱۴	۲۹	۶۴	۳۹	۲۶	۳۵
۱۵	۳۰	۱	۵۰	۲۷	۳۶	۶۳	۳۸

شکل ۵: مربع‌های نیمه‌وفقی ۸×۸ ینیش (چپ) و ونزلیدس (راست)

ینیش توانست مربع نیمه‌وفقی ۸×۸ را با دو دور حرکت دورگشت اسب هم بسازد، که هر یک از این دو دور، درست نیمی از خانه‌های صفحهٔ شطرنج را می‌پوشانند. در شکل زیر نشان داده‌ایم که او چگونه نیمی از خانه‌ها را با یک دور حرکت دورگشتی اسب با اعداد ۱ تا ۳۲ پر می‌کند و سپس

1. Jaenisch
2. Wenzelides

نیم دیگر را با دور کاملاً مستقل دیگری با اعداد ۳۳ تا ۶۴. چنان که می‌بینید، خانهٔ ۱ در پایین‌ترین ردیف و خانهٔ ۶۴ در بالاترین ردیف: باز هم موردی از یک موفقیت ناتمام![۱]

۳۴	۶۱	۶۴	۱۳	۳۶	۱۷	۲۰	۱۵
۶۳	۱۲	۳۵	۶۰	۲۱	۱۴	۳۷	۱۸
۵۶	۳۳	۶۲	۵	۴۴	۱۹	۱۶	۲۵
۱۱	۴	۵۵	۲۲	۵۹	۲۶	۴۵	۳۸
۵۴	۵۷	۱۰	۴۳	۶	۳۹	۲۴	۲۷
۹	۳۲	۳	۵۸	۲۳	۴۶	۴۹	۴۰
۲	۵۳	۳۰	۷	۴۲	۵۱	۲۸	۴۷
۳۱	۸	۱	۵۲	۲۹	۴۸	۴۱	۵۰

شکل ۶: مربع وفقی ۸×۸ ینیش با دو بار حرکت دورگشت اسب

پس این سؤال بزرگ همچنان باقی است: آیا می‌توان با حرکت دورگشت اسب مربع وفقی ۸×۸ ساخت؟ می‌دانیم که ضلع هر مربع وفقی که با حرکت دورگشت اسب ساخته شود، باید مضربی از ۴ باشد. بنابراین همین سؤال در مورد مربع وفقی ۱۲×۱۲ هم پیش می‌آید. جالب این که مربع‌های وفقی ۱۶×۱۶، ۲۰×۲۰، ۲۴×۲۴، ۳۲×۳۲، ۴۸×۴۸ و ۶۴×۶۴ با حرکت دورگشت اسب ساخته شده‌اند. در شکل زیر یک مربع وفقی ۱۶×۱۶ دیده می‌شود.

۱. می‌بینید که از خانهٔ ۶۴ نمی‌توان به خانهٔ ۱ رفت. پس چرخهٔ حرکت اسب بسته نیست (باز است).

۱۸۴	۲۱۷	۱۷۰	۷۵	۱۸۸	۲۱۹	۱۷۲	۷۷	۲۳۸	۳۷	۸۶	۲۱	۲۳۰	۳۹	۸۸	۲۵
۱۶۹	۷۴	۱۸۵	۲۱۸	۱۷۱	۷۶	۱۸۹	۲۲۰	۸۵	۲۰	۲۲۹	۳۸	۸۷	۲۴	۲۳۱	۴۰
۲۱۶	۱۸۳	۶۸	۱۶۷	۲۲۲	۱۸۷	۷۸	۱۷۳	۳۶	۲۲۷	۲۲	۸۳	۴۲	۲۳۷	۲۶	۸۹
۷۳	۱۶۸	۲۱۵	۱۸۶	۶۷	۱۷۴	۲۲۱	۱۹۰	۱۹	۸۴	۳۵	۲۳۸	۲۳	۹۰	۴۱	۲۳۲
۱۸۲	۲۱۳	۱۶۶	۶۹	۱۷۸	۲۲۳	۱۷۶	۷۹	۲۲۶	۳۳	۸۲	۳۱	۲۳۶	۴۳	۹۲	۲۷
۱۶۵	۷۲	۱۷۹	۲۱۴	۱۷۵	۶۶	۱۹۱	۲۲۴	۸۱	۱۸	۲۳۹	۳۴	۹۱	۳۰	۲۳۳	۴۴
۲۱۲	۱۸۱	۷۰	۱۶۳	۲۱۰	۱۷۷	۸۰	۱۶۱	۴۸	۲۲۵	۳۲	۹۵	۴۶	۲۳۵	۲۸	۹۳
۷۱	۱۶۴	۲۱۱	۱۸۰	۶۵	۱۶۲	۲۰۹	۱۹۲	۱۷	۹۶	۴۷	۲۴۰	۲۹	۹۴	۴۵	۲۳۴
۲۰۲	۱۳	۱۲۶	۶۱	۲۰۸	۱۵	۱۲۸	۴۹	۱۶۰	۲۴۱	۱۳۰	۹۷	۱۴۸	۲۴۳	۱۳۲	۱۰۳
۱۲۵	۶۰	۲۰۳	۱۴	۱۲۷	۶۴	۱۹۳	۱۶	۱۲۹	۱۱۲	۱۴۵	۲۴۲	۱۳۱	۱۰۲	۱۴۹	۲۴۴
۱۲	۲۰۱	۶۲	۱۲۳	۲	۲۰۷	۵۰	۱۱۳	۲۵۶	۱۵۹	۹۸	۱۴۳	۲۴۶	۱۴۷	۱۰۴	۱۳۳
۵۹	۱۲۴	۱۱	۲۰۴	۶۳	۱۱۴	۱	۱۹۴	۱۱۱	۱۴۴	۲۵۵	۱۴۶	۱۰۱	۱۳۴	۲۴۵	۱۵۰
۲۰۰	۹	۱۲۲	۵۵	۲۰۶	۳	۱۱۶	۵۱	۱۵۸	۲۵۳	۱۴۲	۹۹	۱۵۴	۲۴۷	۱۳۶	۱۰۵
۱۲۱	۵۸	۲۰۵	۱۰	۱۱۵	۵۴	۱۹۵	۴	۱۴۱	۱۱۰	۱۵۵	۲۵۴	۱۳۵	۱۰۰	۱۵۱	۲۴۸
۸	۱۹۹	۵۶	۱۱۹	۶	۱۹۷	۵۲	۱۱۷	۲۵۳	۱۵۷	۱۰۸	۱۳۹	۲۵۰	۱۵۳	۱۰۶	۱۳۷
۵۷	۱۲۰	۷	۱۹۸	۵۳	۱۱۸	۵	۱۹۶	۱۰۹	۱۴۰	۲۵۱	۱۵۶	۱۰۷	۱۳۸	۲۴۹	۱۵۲

شکل ۷: مربع وفقی ۱۶×۱۶ با حرکت دورگشت اسب

اما بنا به اطلاع گونتر استرتنبرینک[۱] شبکه‌ای از کامپیوترهای پرسرعت، که با برنامهٔ جی.سی. میرینیاک[۲] روی مسئلهٔ بالا کار می‌کردند، روز پنجم اوت سال **۲۰۰۳** با آزمودن تمام وضعیت‌های ممکن به این نتیجه رسیدند که چنین امکانی وجود ندارد، یعنی با حرکت دورگشت اسب نمی‌توان مربع وفقی ۸×۸ ساخت. جزئیات این محاسبه را می توانید در نشانی زیر بخوانید:
http://magictour.free.fr

1. Guenter Stertenbrink
2. J. C. Meyrignac

ساخت مربع‌های وفقی با حرکت شاه و رخ

در سال ۱۹۲۱ گرشی[۱] مربع وفقی ۸×۸ زیر را با حرکت دورگشت شاه بر صفحهٔ شطرنج ساخت. نخست به الگویی توجه کنید که اعداد ۱ تا ۸ در ربع اول صفحه ایجاد کرده‌اند. گرشی در گام بعد قرینهٔ وارون این الگو را در ربع دوم مربع با اعداد ۹ تا ۱۶ پر می‌کند. سپس اعداد ۱۷ تا ۳۲ را همچون تصویر آینه‌ای اعداد ۱ تا ۱۶، با ترتیب وارون، در نیمهٔ پایینی صفحه قرار می‌دهد و در پایان اعداد ۳۳ تا ۶۴ را همچون تصویر آینه‌ای نیمهٔ چپ در راست و نیمهٔ راست در چپ، از اعداد ۱ تا ۳۲ و باز هم با ترتیب وارون می‌سازد.

۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱۱	۵۸	۵۷	۸	۷	۵۷	۵
۱۲	۵۹	۱۰	۹	۵۶	۵۵	۶	۵۳
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲
۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵
۲۱	۳۸	۲۳	۲۴	۴۱	۴۲	۲۷	۴۴
۳۷	۲۲	۳۹	۴۰	۲۵	۲۶	۴۳	۲۸
۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹

شکل ۸: مربع وفقی ۸×۸ گرشی با حرکت دورگشت شاه

مسئلهٔ ۴- یک مربع نیمه‌وفقی ۸×۸ بسازید، چنان که نخست اعداد ۱ تا ۸ را در مستطیل ۴×۲گوشهٔ راست بالا بگذارید. به عبارت دیگر عدد ۶ را به جای عدد ۵۷ در مربع گرشی بگذارید. برای پر کردن خانه‌های دیگر به روش گرشی عمل کنید.

در سال ۱۹۸۵ استنلی رابینوویچ[۲] توانست مربع وفقی ۸×۸ با حرکت دورگشت رخ بسازد. این مربع در شکل زیر دیده می‌شود: یک حرکت دورگشت رخ واقعی! به این معنا که رخ در هر حرکت فقط یک خانه جابجا نمی‌شود. مثلاً حرکت از خانهٔ ۴ به خانهٔ ۵ یک حرکت مجاز برای رخ است. توجه کنید که الگوی اعداد ۱ تا ۸ تقریباً به صورت تصویر آینه‌ای در اعداد ۹ تا ۱۶ تکرار می‌شود: از چپ به راست، اما انتقال یافته به پایین. بقیهٔ این روش همانند روش گرشی است، به این معنا که اعداد ۱۷ تا ۳۲ تصویر آینه‌ای افقی اعداد ۱ تا ۱۶ با ترتیب وارونند و اعداد ۳۳ تا ۶۴ تصویر عمودی اعداد ۱ تا ۳۲ با ترتیب وارونند.

1. Gershi
2. Stanley Rabinowitz

۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳
۲۰	۱۹	۱۸	۴۸	۱۷	۴۷	۴۶	۴۵
۶۰	۵۹	۵۸	۸	۵۷	۷	۶	۵
۳۷	۳۸	۳۹	۲۵	۴۰	۲۶	۲۷	۲۸
۱۳	۱۴	۱۵	۴۹	۱۶	۵۰	۵۱	۵۲
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴
۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹

شکل ۹: مربع وفقی ۸×۸ رابینوویچ با حرکت دورگشت رخ

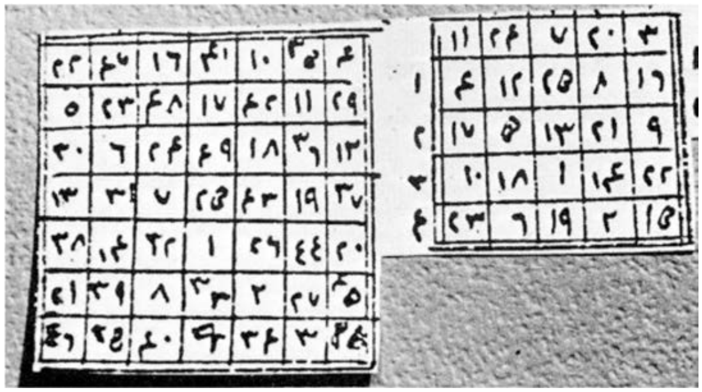
پاسخ‌ها

پاسخ مسئلهٔ ۱ - دو مربع وفقی زیر پاسخهای مسئله‌اند.

۱۱	۲۴	۷	۲۰	۳
۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶
۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹
۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲
۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵

۲۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴
۵	۲۳	۴۸	۱۷	۴۲	۱۱	۲۹
۳۰	۶	۲۴	۴۹	۱۸	۳۶	۱۲
۱۳	۳۱	۷	۲۵	۴۳	۱۹	۳۷
۳۸	۱۴	۳۲	۱	۲۶	۴۴	۲۰
۲۱	۳۹	۸	۳۳	۲	۲۷	۴۵
۴۶	۱۵	۴۰	۹	۳۴	۳	۲۸

شکل ۱۰: مربع‌های وفقی ۵×۵ و ۷×۷ محمد کشنوی



پاسخ مسئلهٔ ۲- مربع وفقی ۷×۷ با حرکت دورگشت اسب به روش محمد کشنوی در شکل زیر دیده می‌شود.

۱	۲۶	۴۴	۲۰	۳۸	۱۴	۳۲
۱۷	۴۲	۱۱	۲۹	۵	۲۳	۴۸
۳۳	۲	۲۷	۴۵	۲۱	۳۹	۸
۴۹	۱۸	۳۶	۱۲	۳۰	۶	۲۴
۹	۳۴	۳	۲۸	۴۶	۱۵	۴۰
۲۵	۴۳	۱۹	۳۷	۱۳	۳۱	۷
۴۱	۱۰	۳۵	۴	۲۲	۴۷	۱۶

شکل ۱۱: مربع وفقی ۷×۷ محمد کشنوی با حرکت اسب

پاسخ مسئلهٔ ۳ - حرکت دورگشت اسب و مربع وفقی ۱۳×۱۳ حاصل از آن در شکل زیر دیده می‌شود:

۱	۱۱۶	۴۹	۱۵۱	۸۴	۱۷	۱۱۹	۶۵	۱۶۷	۱۰۰	۳۳	۱۳۵	۶۸
۱۳۶	۶۹	۲	۱۱۷	۵۰	۱۵۲	۸۵	۱۸	۱۲۰	۵۳	۱۶۸	۱۰۱	۳۴
۱۰۲	۳۵	۱۳۷	۷۰	۳	۱۰۵	۵۱	۱۵۳	۸۶	۱۹	۱۲۱	۵۴	۱۶۹
۵۵	۱۵۷	۱۰۳	۳۶	۱۳۸	۷۱	۴	۱۰۶	۵۲	۱۵۴	۸۷	۲۰	۱۲۲
۲۱	۱۲۳	۵۶	۱۵۸	۱۰۴	۳۷	۱۳۹	۷۲	۵	۱۰۷	۴۰	۱۵۵	۸۸
۱۵۶	۸۹	۲۲	۱۲۴	۵۷	۱۵۹	۹۲	۳۸	۱۴۰	۷۳	۶	۱۰۸	۴۱
۱۰۹	۴۲	۱۴۴	۹۰	۲۳	۱۲۵	۵۸	۱۶۰	۹۳	۳۹	۱۴۱	۷۴	۷
۷۵	۸	۱۱۰	۴۳	۱۴۵	۹۱	۲۴	۱۲۶	۵۹	۱۶۱	۹۴	۲۷	۱۴۲
۲۸	۱۴۳	۷۶	۹	۱۱۱	۴۴	۱۴۶	۷۹	۲۵	۱۲۷	۶۰	۱۶۲	۹۵
۱۶۳	۹۶	۲۹	۱۳۱	۷۷	۱۰	۱۱۲	۴۵	۱۴۷	۸۰	۲۶	۱۲۸	۶۱
۱۲۹	۶۲	۱۶۴	۹۷	۳۰	۱۳۲	۷۸	۱۱	۱۱۳	۴۶	۱۴۸	۸۱	۱۴
۸۲	۱۵	۱۳۰	۶۳	۱۶۵	۹۸	۳۱	۱۳۳	۶۶	۱۲	۱۱۴	۴۷	۱۴۹
۴۸	۱۵۰	۸۳	۱۶	۱۱۸	۶۴	۱۶۶	۹۹	۳۲	۱۳۴	۶۷	۱۳	۱۱۵

شکل ۱۲: یک مربع وفقی ۱۳×۱۳ با حرکت دورگشت اسب

پاسخ مسئلهٔ ۴ - حرکت دورگشت شاه و مربع نیمه‌وفقی ۸×۸ حاصل از آن در شکل زیر دیده می‌شود:

۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۰	۵۹	۵۸	۵۷	۸	۷	۶	۵
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲
۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴
۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹

شکل ۱۳: یک مربع نیمه‌وفقی ۸×۸ با حرکت دورگشت اسب